应用小波系数 GSM 统计模型的混合傅里叶-小波图像降噪

姜三平　郝晓剑
（中北大学电子测试技术国家重点实验室，太原　030051）

摘　要　提出一种混合傅里叶-小波图像降噪算法，该算法的主要步骤是：先在傅里叶域中降噪，然后在小波域中滤除剩余的噪声。小波域中要滤除的是有色噪声，为了考虑有色噪声小波系数间的相关性，采用 GSM（Gaussian scale mixture）统计模型描述图像小波系数的统计特性。实验证明该算法能有效提高降噪效果。

关键词　图像降噪　小波变换　傅里叶变换
中图法分类号：TP751.1　**文献标识码**：A　**文章编号**：1006-8961(2009)03-0448-04

Hybrid Fourier-wavelet Image Denoising Using Gaussian Scale Mixture Model for Wavelet Coefficients

JIANG San-ping, HAO Xiao-jian
(*National Key Laboratory for Electronic Measurement Technology*, *North University of China*, *Taiyuan* 030051)

Abstract　A hybrid Fourier-wavelet denoising method is proposed in this paper. The main steps of the proposed method are as follows. The noisy image is firstly denoised in Fourier domain. Secondly the remaining noise is removed in wavelet domain. The remaining noise is colored. In order to consider the correlation between wavelet coefficients of colored noise the Gaussian scale mixture model for image's wavelet coefficients is used. Experimental results show that the proposed algorithm improves denoising performance efficiently.

Keywords　image denoising, wavelet transform, Fourier transform

1　引　言

随着数字技术的发展，数字图像在人类生活和活动中开始扮演越来越重要的角色，但是图像传感器采集到的图像数据经常会被噪声污染，因此在对图像进一步处理之前，经常要先对图像进行降噪处理。变换域降噪法是图像降噪经常使用的方法。变换域降噪要求图像能在变换域被稀疏表示。但是图像的多样性使得没有一种变换能够稀疏表示所有类型的图像。傅里叶变换能有效地稀疏表示图像中有一定变化周期规律的纹理部分和变化平缓的部分，但是不能有效地表示图像中的突变部分，如图像中的边。近十几年来，小波变换被研究用来进行图像降噪[1]。小波变换能稀疏表示包含尖锐变化部分的信号，但缺点是不能有效地表示图像中的纹理和缓慢变化的部分。因此文献[2]提出一种混合傅里叶-小波图像降噪法来提高图像降噪的效果。本文在文献[2]中提出的混合傅里叶-小波图像降噪法的基础上，使用 GSM 模型[3]描述图像的小波系数来进一步提高滤波效果。

2　混合傅里叶-小波图像降噪

考虑一个含有噪声的图像 $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + n \tag{1}$$

收稿日期：2007-12-21；**改回日期**：2008-04-25

第一作者简介：姜三平（1971～　），男。中北大学信息与通信工程学院测试计量技术及仪器专业博士研究生。主要研究方向为图像处理、光电检测。E-mail：jiangsanping@nuc.edu.cn

式中,$\boldsymbol{x}$ 是原始图像,n 是零均值的高斯白噪声,其方差为 σ_n^2。文献[2]中的混合傅里叶-小波图像降噪方法的主要步骤如下:

(1)在傅里叶域中保守地降噪,使噪声的水平降低而又不过分扭曲原始图像。

(2)在小波域中去除剩余的噪声。

在傅里叶域中用维纳滤波器来降噪,它的传递函数如下:

$$H(\omega)=\frac{S(\omega)}{S(\omega)+N(\omega)} \tag{2}$$

式中,$S(\omega)$是原始图像的功率谱密度,$N(\omega)$是噪声的功率谱密度。因为假设噪声是高斯白噪声,所以 $N(\omega)$ 是一个常数 σ_n^2。用 $Y(\omega)$表示含噪声图像 $\boldsymbol{y}$ 的傅里叶变换,对每一个数据点 $Y(\omega)$,在一个局部方形区域 $W(\omega)$上按下式计算 $S(\omega)$的估计 $\hat{S}(\omega)$:

$$\hat{S}(\omega)=\max\left(a,\frac{1}{M}\sum_{j\in W}|Y(j)|^2-\sigma_n^2\right)\quad a>0 \tag{3}$$

式中,M 是方形窗口区域 $W(\omega)$中傅里叶系数的个数,a 是 x 的最小功率谱密度。为了避免严重扭曲原始图像,在维纳滤波器中增加参数 b,保守地按下式实现维纳滤波器:

$$H(\omega)=\frac{b\cdot\hat{S}(\omega)}{b\cdot\hat{S}(\omega)+\sigma_n^2}\quad b>1 \tag{4}$$

进行傅里叶反变换,便得到傅里叶域中的滤波结果:

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{x}'+n' \tag{5}$$

式中,n'是剩余的有色噪声,$\boldsymbol{x}'$是被轻微扭曲的不含噪声的图像。

用 v 表示 $\boldsymbol{x}'$的正交小波系数,$\boldsymbol{y}'$的小波系数是:

$$s=v+w \tag{6}$$

式中,w 是 n'的小波系数。因为 n'是有色噪声,w 也是有色噪声,但在每一个子带中,小波系数 w 接近是白噪声。因此文献[2]中的混合傅里叶-小波图像降噪将 w 当作白噪声在小波域中降噪。如果能考虑有色噪声小波系数间的相关性,则降噪效果能进一步提高。而文献[3]中提出的基于 GSM 模型的降噪方法就是一种能够处理有色噪声的图像降噪算法。

3 应用 GSM 模型的混合傅里叶-小波图像降噪

设在一个局部邻域内的原始图像的小波系数组成一个随机向量 $\boldsymbol{v}$,GSM 模型假设:

$$\boldsymbol{v}=\sqrt{z}\boldsymbol{u} \tag{7}$$

式中,z 为一个随机变量,$\boldsymbol{u}$ 是零均值高斯随机向量。因此局部邻域内,含噪声图像的小波系数组成的随机向量 $\boldsymbol{s}$ 的概率分布为

$$\boldsymbol{s}=\sqrt{z}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \tag{8}$$

式中,$\boldsymbol{w}$ 是局部邻域内加性高斯噪声的小波系数组成的随机向量。文献[3]建议取随机变量 z 的分布为

$$p_z(z)=\frac{1}{z},z\in[z_{\min},z_{\max}] \tag{9}$$

记 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的协方差阵为 $\boldsymbol{C}_u$ 和 $\boldsymbol{C}_w$,则在 z 的条件下,$\boldsymbol{s}$ 的条件概率分布为

$$p(\boldsymbol{s}|z)=\frac{\exp[-\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{C}_u+\boldsymbol{C}_w)^{-1}\boldsymbol{s}/2]}{\sqrt{(2\pi)^N|z\boldsymbol{C}_u+\boldsymbol{C}_w|}} \tag{10}$$

式中,N 为随机向量 $\boldsymbol{s}$ 的维数。

记 $E(z)$为随机变量 z 的数学期望。则 $\boldsymbol{C}_s=E(z)\boldsymbol{C}_u+\boldsymbol{C}_w$,给定 $\boldsymbol{C}_s$ 和 $\boldsymbol{C}_w$,便可以计算出 $\boldsymbol{C}_u$:

$$E(z)\boldsymbol{C}_u=\boldsymbol{C}_s-\boldsymbol{C}_w \tag{11}$$

不失一般性,取 $E(z)=1$,则

$$\boldsymbol{C}_u=\boldsymbol{C}_s-\boldsymbol{C}_w \tag{12}$$

若 $\boldsymbol{w}$ 是白噪声,则协方差阵 $\boldsymbol{C}_w$ 是一个对角阵,对角线上的元素为噪声的方差。实际应用中,$\boldsymbol{C}_s$ 可以通过对 $\boldsymbol{s}$ 的每一对元素的乘积取均值获得。

记 v_c 为每一个邻域中心要估计的小波系数,则它的贝叶斯最小方差估计 $\hat{v}_c$ 为在 $\boldsymbol{s}$ 的条件下 v_c 的数学期望:

$$\begin{aligned}\hat{v}_c&=E(v_c\mid\boldsymbol{s})\\&=\int v_c p(v_c\mid\boldsymbol{s})dv_c\\&=\int\int_0^\infty v_c p(v_c,z\mid\boldsymbol{s})dzdv_c\\&=\int\int_0^\infty v_c p(v_c\mid\boldsymbol{s},z)p(z\mid\boldsymbol{s})dzdv_c\\&=\int_0^\infty E(v_c\mid\boldsymbol{s},z)p(z\mid\boldsymbol{s})dz\end{aligned} \tag{13}$$

因为在条件 z 下,随机向量 $\boldsymbol{v}$ 是高斯的,因此式(13)中的条件数学期望 $E(v_c|\boldsymbol{s},z)$可以通过线性维纳估计获得:

$$E(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{s},z)=z\boldsymbol{C}_u(z\boldsymbol{C}_u+\boldsymbol{C}_w)^{-1}\boldsymbol{s} \tag{14}$$

根据贝叶斯定律有:

$$p(z\mid\boldsymbol{s})=\frac{p(\boldsymbol{s}\mid z)p_z(z)}{\int_0^\infty p(\boldsymbol{s}\mid\alpha)p_z(\alpha)d\alpha} \tag{15}$$

式中,条件概率密度 $p(\boldsymbol{s}|z)$ 见式(10)。

总结基于 GSM 模型的降噪算法如下:

(1)将含噪图像进行小波变换。

(2)在小波系数的每一个子带中

①计算噪声小波系数的协方差阵 $\boldsymbol{C}_w$。

②估计含噪图像小波系数的协方差阵 $\boldsymbol{C}_s$。

③按式(12)计算 $\boldsymbol{C}_u$。

④对每一个局部邻域:

ⅰ)对每一个 z 值:按式(14)计算 $E(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{s},z)$按式(10)计算 $p(\boldsymbol{s}|z)$

ⅱ)按式(9)和式(15)计算 $p(z|\boldsymbol{s})$

ⅲ)按式(13)用数值积分的方法计算 $E(v_c|\boldsymbol{s})$

(3)做小波逆变换获得降噪后的图像。

由以上所述可知,基于 GSM 模型的降噪算法允许噪声为有色噪声,因此可以在混合傅里叶-小波降噪中用来滤除在小波域中的有色噪声。采用 GSM 模型的混合傅里叶-小波图像降噪算法的步骤如下:

(1)在傅里叶域中:

①用式(3)估计原始图像的功率谱密度;

②用式(4) 表示的维纳滤波器降噪。

(2) 在小波域中用上述基于 GSM 模型的算法降噪。

有色噪声小波系数的协方差阵 $\boldsymbol{C}_w$ 可按下式计算:

$$\begin{aligned}E(w_m w_n) &= E\left[\sum_i\sum_j \psi_m(i)n'(i)\psi_n(j)n'(j)\right]\\&=\sum_i\sum_j\psi_m(i)\psi_n(j)E\left[n'(i)n'(j)\right]\\&=\sum_i\sum_j\psi_m(i)\psi_n(j)r(i-j)\end{aligned}\tag{16}$$

式中,w_m、w_n 分别表示随机向量 $\boldsymbol{w}$ 的第 m 和第 n 个元素,$E(w_m w_n)$是 $\boldsymbol{C}_w$ 的第 m 行第 n 列元素,ψ 是小波基函数,n'是如式(5)所示傅里叶域滤波后的有色噪声,r 是有色噪声 n'的自相关函数。

4 实验结果

对 Lena、Barbara 两幅图像做仿真实验。实验中选择傅里叶域和小波域中的方形窗口尺寸分别为 7×7 和 3×3,$a=0.1\sigma_n^2$ 和 $b=5$。小波变换采用 Daubechies 有 4 个消失动量的小波。把本文方法和文献[2]中的混合傅里叶-小波降噪法、文献[4]中的硬阈值法以及文献[5]中的 LAWMAP 法做比较,表 1 列出了实验结果的 PSNR 值。可以看出本文提出的方法比文献[2]中的方法的降噪效果又有了显著提高。图 1 和图 2 是 Lena 和 Barbara 两幅图像在 $\sigma_n=25$ 时的含噪声图像及用本文提出的方法降噪后的图像。

表 1 几种降噪方法的 PSNR 值比较

Tab. 1 Comparison of PSNRs for denoising algorithms

	噪声标准偏差 σ_n	10	15	20	25
Lena	硬阈值法	30.61	28.91	27.75	26.96
	LAWMAP 5×5	34.31	32.36	31.01	29.98
	文献[2] 的方法	34.52	32.56	31.16	30.07
	本文方法	34.64	32.75	31.41	30.37
Barbara	硬阈值法	27.41	25.21	23.92	23.16
	LAWMAP 5×5	32.57	30.19	28.59	27.42
	文献[2] 的方法	33.04	30.67	29.06	27.85
	本文方法	33.11	30.80	29.21	28.03

图 1 含噪声的($\sigma_n=25$)和降噪后的 Lena 图像

Fig. 1 Noisy($\sigma_n=25$) and denoised Lena

图 2　含噪声的($\sigma_n = 25$)和降噪后的 Barbara 图像

Fig. 2　Noisy($\sigma_n = 25$) and denoised Barbara

5　结　论

提出一种混合傅里叶-小波图像降噪算法,该算法应用 GSM 统计模型描述图像小波系数的统计模型,以便更好地滤除混合傅里叶-小波图像降噪中的有色噪声。实验证明该算法能有效提高算法的降噪效果。本文使用的是 2 维可分离的离散正交小波变换。2 维不可分离的离散小波变换如 contourlet[6-8] 比可分离的小波变换更适合用来描述 2 维图像,因此若在混合傅里叶-小波图像降噪算法中采用 2 维不可分离的离散小波变换还可以进一步提高滤波效果。

参考文献(References)

1 Li Xu-chao. Zhu Shan-an. Surrey of wavelet domain image denoising [J]. Journal of Image and Graphics, 2006, **11**(9):1201-1209. [李旭超, 朱善安. 小波域图像降噪概述[J]. 中国图象图形学报, 2006, **11**(9):1201-1209.]

2 Jiang S, Hao X. Hybrid Fourier-wavelet image denoising[J]. Electronics Letters, 2007, **43**(20):1081-1082.

3 Portilla J, Strela V, Wainwright M J, *et al*. Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, **12**(11):1338-1351.

4 Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, **81**(3):425-455.

5 Mihcak M K, Kozintsev I, Ramchandran K, *et al*. Low complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1999, **6**(12):300-303.

6 Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, **11**(12):2091-2106.

7 Po D D-Y, Do M N. Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, **15**(6): 1610-1620.

8 Zhou Z F, Shui P L. Contourlet-based image denoising algorithm using directional windows[J]. Electronics Letters, 2007, **43**(2): 92-93.